

Sommaire

Introduction :

L'objet de ce document est de proposer un ensemble de situations dont l'enjeu didactique est de permettre à l'élève de cycle 3 de construire le concept de fraction simple. Les situations présentées doivent être répétées, en multipliant les exemples afin que les élèves puissent bénéficier d'une expérience forte basée sur la manipulation et la mise à distance de fractions de l'unité.

L'objet de cette manipulation est de développer chez les élèves des représentations mentales qui vont soutenir des capacités langagières et de communication puis d'abstraction.

En ce sens, les variables déclinées dans chaque situation sont importantes. Elles constituent des étapes de la progression didactique et elles doivent faire l'objet d'une attention particulière des enseignants.

Concernant l'écriture fractionnaire, il n'y a pas d'urgence à l'utiliser, ni nécessité à la refuser. En fonction de l'organisation de classe en simple ou double niveau, ou encore dans l'avancée du travail sur les disques (cf. document « Fractions – Disques »), il se peut que cette écriture soit apportée par les élèves de façon plus ou moins précoce. L'écriture codifiée ne représente pas un enjeu d'apprentissage premier, elle doit soulager les formulations « propres » des élèves.

1. Situation 1

Reproduire une bande de même longueur à l'aide d'une bande unité

2. Situation 2

Comparer plusieurs longueurs de bandes pour reconstituer des paires de même longueur.

3. Situation 3

Ordonner plusieurs bandes en utilisant les mesures effectuées séparément sur chacune

4. Situation 4

Produire un message qui permettra de reproduire une bande exactement de même longueur qu'une bande à mesurer

5. Situation 5

Parmi plusieurs mesures écrites, rechercher celles qui désignent des longueurs égales.

6. Situation 6

Décomposer ou simplifier une fraction

Fractions - Bandes unités

Remarque préalable : Dans l'ensemble des situations, les bandes à découper sont mises à distance. Pour ce faire, nous disposons de deux possibilités : placer les bandes à découper sur une table en fond de classe, ou bien placer les bandes mesurées dans une enveloppe afin que l'élève n'ait plus sous les yeux la bande mesurée au moment où il découpe sa bande de même longueur. Dans la suite, nous décrivons cette seconde proposition, mais si vous choisissez de placer les bandes à découper sur une table annexe, les enveloppes ne sont plus nécessaires.

Situation 1

Reproduire une bande de même longueur à l'aide d'une bande unité

Matériel (voir fichiers joints : supports situation 1)

- bandes unité (bande grise : à découper le plus précisément possible)
- planche de 6 bandes à mesurer (A B C D E F), placée dans une enveloppe
- bandes de 1 cm de large (découpées au massicot, il est important qu'elles soient de même largeur que les bandes à mesurer) dans la largeur d'une feuille A4 (l = 21cm). Ces bandes à découper sont aussi placées dans une enveloppe ; elles peuvent aussi être distribuées en cours d'activité

Dispositif et activité

Une planche support des bandes à mesurer et une bande unité sont placées dans une enveloppe fermée. Les enveloppes sont distribuées aux élèves (individuellement ou en binômes). *Il n'est pas nécessaire de découper les bandes à mesurer.*

Déroulement

1. Les élèves sortent la planche de bande à mesurer et la bande unité de l'enveloppe. Ils doivent reproduire une bande de leur choix, **grâce à la bande unité (uniquement)**. La bande découpée devra être exactement de la même longueur que la bande choisie.
2. Une fois la mesure faite, la planche et la bande unité sont replacées dans l'enveloppe.
3. Pour fabriquer la bande de même mesure, les élèves disposent d'une seconde bande unité et de bandes blanches à découper (placées dans une seconde enveloppe ou distribuées plus tard).

Attention : la planche de bandes à mesurer et la première bande unité sont rangées dans l'enveloppe avant que les bandes à découper et la seconde bande unité soient accessibles.

Validation

Quand les élèves pensent avoir fabriqué une bande égale à la bande à mesurer choisie, ils peuvent comparer les deux bandes (en reprenant la planche support dans l'enveloppe) et valider le résultat.

Le dispositif doit permettre de répéter à plusieurs reprises des expériences de reproduction de bandes. Il doit aussi permettre aux élèves de travailler à leur rythme.

Variables

1 - modifier la longueur de l'unité (cf. supports ci-dessous)

L'enjeu est de confronter les élèves à des fractions supérieures à 1 unité et/ou inférieures à 1 unité. Il s'agit aussi d'utiliser des fractions simples $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et de comprendre les premières relations entre elles.

(Les fractions simples $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, ... seront rencontrées via les situations sur les disques.)

2 - différer la reproduction des bandes

Dans cette variable, il est demandé aux élèves de prendre des notes qui leur permettront de reproduire les 6 bandes ultérieurement.

Ils disposent de l'enveloppe, de la bande unité et d'un moyen de noter des informations. Ils pourront les utiliser pour reproduire des bandes. La validation se fait sur le même principe que précédemment.

3 - dictée de bandes

Ici, l'enseignant dicte une longueur de bande à construire à l'aide d'une bande unité. Il dispose lui-même de la bande à mesurer qui permettra aux élèves de valider. Cette modalité peut être prise en charge par un élève. Cette variable engage les élèves, par le biais d'une activité connue, à automatiser des procédures. Elle peut aussi favoriser l'institutionnalisation des savoirs.

4 - travail en binômes

Après avoir laissé la possibilité aux élèves de travail seul pour que leur expérience de la situation soit suffisante, constituer des binômes hétérogènes pour permettre aux élèves d'échanger sur leurs procédures. Les élèves ne parvenant pas à dépasser le stade de la manipulation peuvent ainsi donner du sens à l'activité.

Pour répondre aux objectifs fixés par la situation, 4 planches supports sont proposées. Elles convoquent des variables relatives à la grandeur de l'unité et aux fractions qui sont représentées par les bandes à mesurer. Le tableau ci-après les synthétisent.

La formulation des expressions respecte la codification universelle des fractions. L'enjeu n'est pas que les élèves les utilisent pour l'instant. Ils vont recourir à des formulations propres qui s'appuient le plus souvent sur un langage quotidien : la moitié, le quart ou plié en 2, en 4 ou en 8.

Ces renseignements sont destinés à fournir les réponses aux enseignants.

Situation 1 – support 1						
U = 6 cm						
bande	A	B	C	D	E	F
Longueur en cm	3 cm	13,5 cm	10,5 cm	4,5 cm	9 cm	15 cm
Expression(s) attendue(s)	$\frac{1}{2}u$	$2u + \frac{1}{4}u$	$1u + \frac{3}{4}u$	$\frac{3}{4}u$	$1u + \frac{1}{2}u$	$2u + \frac{1}{2}u$

Situation 1 – support 2						
U = 8 cm						
bande	A	B	C	D	E	F
Longueur en cm	10 cm	6 cm	13 cm	14 cm	7 cm	2 cm
Expression(s) attendue(s)	$1u + \frac{1}{4}u$	$\frac{3}{4}u$	$1u + \frac{5}{8}u$	$1u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$	$\frac{7}{8}u$	$\frac{1}{4}u$

Situation 1 – support 3						
U = 16 cm						
bande	A	B	C	D	E	F
Longueur en cm	8 cm	14 cm	2 cm	10 cm	12 cm	6 cm
Expression(s) attendue(s)	$\frac{1}{2}u$	$\frac{7}{8}u$	$\frac{1}{8}u$	$\frac{1}{2}u + \frac{1}{8}u = \frac{5}{8}u$	$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u = \frac{3}{4}u$	$\frac{3}{8}u$

Situation 1 – support 4						
U = 12 cm						
bande	A	B	C	D	E	F
Longueur en cm	18 cm	13,5 cm	15 cm	3 cm	16,5 cm	10,5 cm
Expression(s) attendue(s)	$1u + \frac{1}{2}u$	$1u + \frac{1}{8}u$	$1u + \frac{1}{4}u$	$\frac{1}{4}u$	$1u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}u$	$\frac{7}{8}u$

Situation 2

Comparer plusieurs longueurs de bandes pour reconstituer des paires de même longueur

Matériel (voir fichiers joints : supports situation 2)

- bande unité (grise : à découper le plus précisément possible)
- planche de 8 bandes à mesurer (A B C D E F G H). Les bandes sont découpées et placées dans une enveloppe. Elles représentent 4 paires de bandes égales deux à deux.

Dispositif et activité

Les élèves reçoivent une enveloppe avec les 8 bandes placées à l'intérieur.

Ils doivent chercher à reconstituer les paires de bandes de longueur égale en inscrivant ce résultat sur leur ardoise ou leur cahier.

Ils ne peuvent sortir qu'une seule bande de l'enveloppe. Ils peuvent effectuer des mesures avec la bande unité. Quand ils veulent sortir une nouvelle bande, ils doivent mettre la précédente à l'écart (par exemple dans une seconde enveloppe).

On veillera à ce que les bandes ne soient mesurées qu'à l'aide de la bande unité ; ils ne devront pas tracer la longueur sur un support papier.

Validation

Quand les élèves pensent avoir réussi à appairer les 4 paires de bandes. Ils peuvent toutes les sortir de l'enveloppe. La juxtaposition des bandes les renseignera.

Variables

Le nombre de paires de bandes ; le nombre de bandes peut être diminué ou augmenté. Pour cela, vous pouvez utiliser la version « 12 bandes » du document. Cf. « supports situation 2 – 12 bandes ».

Situation 3

Ordonner plusieurs bandes en utilisant les mesures effectuées séparément sur chacune

Matériel (voir fichiers joints : supports situation 3)

- bande unité (grise : à découper le plus précisément possible)
- 6 à 8 bandes à mesurer (A B C D E F / G H) découpées séparément et placées dans une enveloppe
- support de prises de notes (cahier ou feuille indépendante)

Dispositif et activité

Les élèves reçoivent une enveloppe avec les 6, 7 ou 8 bandes placées à l'intérieur.

Ils doivent chercher à écrire les lettres des bandes dans un ordre croissant ou décroissant des longueurs.

Ils ne peuvent sortir qu'une seule bande de l'enveloppe à la fois. Ils doivent effectuer des mesures avec la bande unité. Quand ils veulent sortir une nouvelle bande, ils doivent mettre la précédente à l'écart (par exemple dans une seconde enveloppe).

On veillera à ce que les bandes ne soient mesurées qu'à l'aide de la bande unité ; ils ne devront pas tracer la longueur sur un support papier.

Lors de la passation de la consigne, il semble intéressant de proposer aux élèves d'utiliser un support pour prendre en notes les différentes mesures effectuées.

Validation

Quand ils pensent avoir terminé le classement, ils peuvent ressortir toutes les bandes pour valider.

Situation 4

Produire un message qui permettra de reproduire une bande exactement de même longueur qu'une bande de référence

Matériel

- bande unité commune à tous les élèves
- enveloppes contenant chacune une seule bande (les enveloppes sont placées sur une table). Il doit y avoir plusieurs enveloppes contenant une bande de même longueur. Ex : 3 enveloppes contenant une bande A, 3 pour une bande B... Le nom de la bande est inscrit sur l'enveloppe. (On peut reprendre les bandes des situations 1, 2 ou 3) – exemple de configuration pour une classe de 27 élèves. On peut ainsi, dans cette même classe, utiliser un jeu de 6 bandes différentes reproduites 3 fois. Il y aura 3 enveloppes A, 3 enveloppes B...
- feuilles pour produire les messages
- bandes prédécoupées de même largeur que les bandes à mesurer

Dispositif et activité

1^{ère} phase – Production des messages :

Les élèves disposent d'une bande unité. Chaque élève ou binôme va chercher une enveloppe dans laquelle se trouve une bande. Il doit produire un message qui permettra, plus tard, à ceux qui reprendront cette enveloppe de reproduire une bande exactement de même longueur.

Quand le message est produit, il est inséré dans l'enveloppe avec la bande mesurée. Cette enveloppe est alors replacée sur la table.

Les élèves (ou binômes) vont dans ce premier temps produire plusieurs messages. Le nombre de messages produits peut varier d'un groupe à l'autre, selon leur propre rythme de travail. Ainsi, dans une même enveloppe, il pourra y avoir plusieurs messages.

2^{ème} phase – Exploitation des messages :

Les enveloppes sont redistribuées aux groupes. On s'attachera à donner des enveloppes correspondant à des bandes sur lesquelles ils n'ont pas travaillé.

La tâche des élèves est double :

- Reproduire la bande à mesurer à l'aide de la bande unité en utilisant les messages mais sans sortir la bande à mesurer de l'enveloppe + valider quand ils pensent avoir réussi.
- Identifier, à partir de la comparaison des messages, des critères pertinents et les difficultés de compréhension.

Proposition de mise en œuvre progressive

1^{ère} étape : messages écrits dans les enveloppes

Cette situation correspond à ce qui est présenté plus haut

2^{ème} étape : message oral par 2 élèves (ou par le maître sous forme de dictée) pour toute la classe

2 élèves énoncent oralement à toute la classe des informations pour reproduire une bande à mesurer. Eux seuls y ont accès. Ils présenteront ensuite la bande à mesurer à chaque élève ou binôme pour validation.

Variante : message entre 2 élèves en binômes

Cette même situation est mise en œuvre entre 2 élèves : un émetteur / un producteur. Le message peut être communiqué oralement et/ou par écrit.

3^{ème} étape : message entre 2 élèves en binômes

Cette même situation est mise en œuvre entre 2 élèves : un émetteur / un producteur. Le message peut être

4^{ème} étape : mise en relation d'écritures. Après une première phase, les élèves doivent permettre de mettre en relation les différentes écritures possibles d'une même bande.

Situation 5

Parmi plusieurs mesures écrites, rechercher celles qui désignent des longueurs égales.

Matériel

- bande unité commune à tous les élèves
- séries de longueurs écrites sous formes de sommes d'entiers et de fractions simples
- bandes prédécoupées de même largeur que les bandes de référence

Dispositif et activité

Une liste de longueurs est présentée aux élèves. Ils doivent anticiper pour identifier celles qui désignent la même longueur. Dans cette phase, ils peuvent recourir à l'écrit ou s'appuyer sur une gestion mentale. Ils doivent toutefois indiquer quelles sont les écritures désignant des longueurs égales.

Validation

Ils ont la possibilité de recourir à la manipulation pour construire les bandes et étayer les justifications écrites et/ou orales.

A noter : Dans cette situation, comme dans les précédentes, il n'est pas forcément attendu que la forme fractionnaire soit utilisée. Chacun fera apparaître l'écriture et en demandera l'usage systématique selon le degré de compréhension des élèves. On fera surtout attention à ne pas rendre cet usage prématuré.

Exemple de fiche de travail

Cf. fiches proposées ci-dessous.

Série A : Additions simples de $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{8}$

Série B : Additions simples de $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{8}$

Série C : Additions et soustractions de $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{8}$; compléments à l'unité ; intrus ; fraction $\frac{3}{3}$

Série D : Additions et $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{8}$; numérateur de grande taille.

Série E : Additions et soustractions de $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{8}$;

Série F : Additions et soustractions de $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{8}$; additions soustractions de fraction au même dénominateur. Abstraction et règles sur les additions de fractions. Commutativité.

Autre proposition d'activité :

Trouver le plus possible d'écritures d'une fraction. La validation pourra se faire par la construction ou / et par les échanges entre pairs.

Série A :

$$A = 2u + \frac{1}{2}u$$

$$B = 1u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$$

$$C = \frac{3}{2}u + 1u$$

$$D = \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}u$$

$$E = \frac{1}{2}u + \frac{5}{4}u$$

$$F = 1u + \frac{6}{8}u + \frac{1}{4}u$$

Corrigé A :

$$A = \frac{5}{2}u$$

$$B = \frac{7}{4}u$$

$$C = \frac{5}{2}u$$

$$D = 2u$$

$$E = \frac{7}{4}u$$

$$F = 2u$$

Série B :

$$A = \frac{1}{4}u + \frac{9}{2}u + \frac{3}{4}u$$

$$B = \frac{3}{4}u + \frac{4}{2}u + \frac{3}{4}u$$

$$C = \frac{4}{2}u + 2u$$

$$D = 3u + \frac{5}{2}u$$

$$E = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}u + \frac{6}{8}u$$

$$F = 1u + \frac{6}{8}u$$

Corrigé B :

$$A = \frac{11}{2}u$$

$$B = \frac{7}{4}u$$

$$C = 4u$$

$$D = \frac{11}{2}u$$

$$E = 4u$$

$$F = \frac{7}{4}u$$

Série C :

$$A = \frac{3}{4}u + \frac{8}{8}u + \frac{1}{4}u$$

$$B = \frac{5}{8}u + \frac{3}{2}u + \frac{3}{8}u$$

$$C = 2u + \frac{4}{4}u - \frac{1}{2}u$$

$$D = \frac{3}{2}u + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2}u$$

$$E = \frac{2}{8}u + \frac{3}{3}u + \frac{6}{8}u$$

$$F = 2u + \frac{1}{8}u$$

Corrigé C :

$$A = 2u$$

$$B = \frac{5}{2}u$$

$$C = \frac{5}{2}u$$

$$D = \frac{5}{2}u$$

$$E = 2u$$

$$F = \frac{9}{8}u$$

Série D :

$$A = \frac{3}{2}u + \frac{5}{4}u$$

$$B = \frac{3}{2}u + \frac{3}{8}u + \frac{3}{4}u$$

$$C = \frac{5}{2}u + \frac{2}{4}u$$

$$D = 2u + \frac{3}{4}u$$

$$E = \frac{1}{2}u + \frac{3}{4}u + 1u + \frac{6}{8}u$$

$$F = \frac{22}{8}u$$

Corrigé D :

$$A = \frac{11}{4}u$$

$$B = \frac{9}{4}u$$

$$C = 3u$$

$$D = \frac{11}{4}u$$

$$E = 3u$$

$$F = \frac{11}{4}u$$

Série E :

$$A = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$$

$$B = \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}u - \frac{1}{8}u$$

$$C = \frac{5}{2}u - \frac{14}{8}u$$

$$D = 1u - \frac{1}{4}u$$

$$E = \frac{3}{8}u + \frac{1}{4}u - \frac{1}{8}u$$

$$F = 1u - \frac{1}{8}u - \frac{1}{4}u$$

Corrigé E :

$$A = \frac{3}{4}u$$

$$B = \frac{1}{2}u$$

$$C = \frac{3}{4}u$$

$$D = \frac{3}{4}u$$

$$E = \frac{1}{2}u$$

$$F = \frac{5}{8}u$$

Série F :

$$A = \frac{15}{2}u - \frac{10}{2}u$$

$$B = \frac{5}{8}u + \frac{1}{4}u - \frac{1}{8}u$$

$$C = \frac{3}{8}u - \frac{3}{4}u + \frac{6}{6}u + \frac{15}{8}u$$

$$D = \frac{6}{6}u - \frac{1}{4}u + \frac{14}{8}u$$

$$E = 4u - \frac{1}{4}u - \frac{4}{8}u - \frac{5}{2}u$$

$$F = 3u + \frac{1}{8}u$$

Corrigé F :

$$A = \frac{5}{2}u$$

$$B = \frac{3}{4}u$$

$$C = \frac{5}{2}u$$

$$D = \frac{5}{2}u$$

$$E = \frac{3}{4}u$$

$$F = \frac{25}{8}u$$

Situation 6

Décomposer ou simplifier une fraction

Matériel

- bande unité commune à tous les élèves
- bandes prédécoupées de même largeur que les bandes à mesurer

Dispositif

Etape 1 : Trouver et valider (avec ou sans l'aide de la construction) le plus possible d'écritures.

Une bande est distribuée aux élèves. Ils doivent trouver par construction l'ensemble des décompositions possibles de la bande proposée.

Les élèves peuvent recourir à l'écrit ou s'appuyer sur une gestion mentale.

Etape 2 : Trouver l'écriture simplifiée d'une fraction ou d'une somme de fractions (avec ou sans l'aide de la construction).

Une écriture fractionnaire est proposée aux élèves (par le maître ou un pair). Les élèves doivent trouver par construction, l'écriture simplifiée de cette écriture.

Les élèves peuvent recourir à l'écrit ou s'appuyer sur une gestion mentale.

Validation

Les élèves font des propositions qui sont notées au tableau. Ils ont la possibilité de recourir à la manipulation pour vérifier la justesse de chaque proposition.

Exemples

$$A = \frac{5}{4} u = u + \frac{1}{4} u$$

$$H = \frac{23}{8} u = 2 u + \frac{3}{4} u + \frac{1}{8} u$$

$$O = \frac{23}{4} u = 5 u + \frac{3}{4} u$$

$$B = \frac{9}{8} u = u + \frac{1}{8} u$$

$$I = \frac{32}{8} u = 4 u$$

$$P = \frac{20}{5} u = 4 u$$

$$C = \frac{5}{2} u = 2 u + \frac{1}{2} u$$

$$J = \frac{6}{6} u = u$$

$$Q = \frac{23}{5} u = 4 u + \frac{3}{5} u$$

$$D = \frac{9}{2} u = 4 u + \frac{1}{2} u$$

$$K = \frac{12}{2} u = 6 u$$

$$R = \frac{11}{7} u = u + \frac{4}{7} u$$

$$E = \frac{13}{4} u = 3 u + \frac{1}{4} u$$

$$L = \frac{12}{6} u = 2 u$$

$$S = \frac{13}{10} u = 1 u + \frac{3}{10} u$$

$$F = \frac{11}{8} u = u + \frac{3}{8} u$$

$$M = \frac{14}{7} u = 2 u$$

$$T = \frac{28}{10} u = 2 u + \frac{4}{5} u$$

$$G = \frac{13}{8} u = u + \frac{1}{2} u + \frac{1}{8} u$$

$$N = \frac{19}{6} u = 3 u + \frac{1}{6} u$$

$$U = \frac{129}{10} u = 10 u + \frac{4}{5} u + \frac{1}{10} u$$